Prof. Hernández

Segundo Parcial de Análisis Matemático II

Fecha: 8/7/24 **Apellido y Nombre:**

Curso: Z2042 **Legajo:**

1. Halle la circulación de $\bar{f}(\bar{x}) = (xz; -\frac{z^2}{2}; x^2)$ a través de la curva intersección de las superficies $z = 4 - x^2 - y^2 \;\; \wedge \;\; z + 2x = 4$. Indique en un gráfico el sentido en que recorre la curva
2. Determine el área de la porción del plano $y = 2x$ limitada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
3. Calcule el flujo de $\bar{f}(\bar{x}) = (xy; xy^2; -2xyz)$ a través de superficie frontera del sólido $x^2 + z^2 \leq 9$; $0 \leq y \leq 2x$; $z \geq 0$. . Indique si el lujo es saliente o entrante al sólido
4. Calcule la circulación del campo $\bar{f}(x; y; z) = (2x; z; y - 2z)$ a lo largo de la curva dada por las intersecciones de las superficies $x^2 + y^2 = 1 \;\; \wedge \;\; z + x = 1$ desde $(1; 0; 0)$ hasta $(0; 1; 1)$. Verifique si la circulación es independiente del camino que une los puntos
5. a) Defina líneas de campo para un campo vectorial b) Halle la línea de campo de $\bar{f}(x; y) = (2; x)$ que pasa por (2;5)
6. a)Enuncie el teorema de Green indicando las hipótesis b)Si $\bar{f}(x; y) = (2y; x + y)$ Donde $\oint_{c^+} \bar{f} \cdot d\bar{g} = -6$ determine el área del recinto plano D que tiene como curva frontera a C

AM 2	2° parcial - Hernández	HOJA N°: 1/3 FECHA: 8-7-24

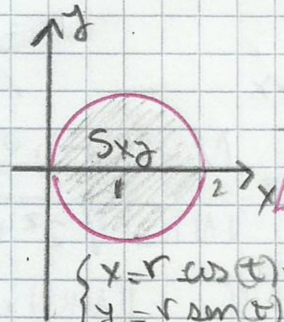
① Hallar la circ. de $\bar{F}(\bar{X}) = \left(xz, -\frac{z^2}{2}, -x^2\right)$ a través de la curva intersección de las sup: $z = 4-x^2-y^2 \wedge z+2x=4$

Indicar, en un gráfico, el sentido que recorre la curva.

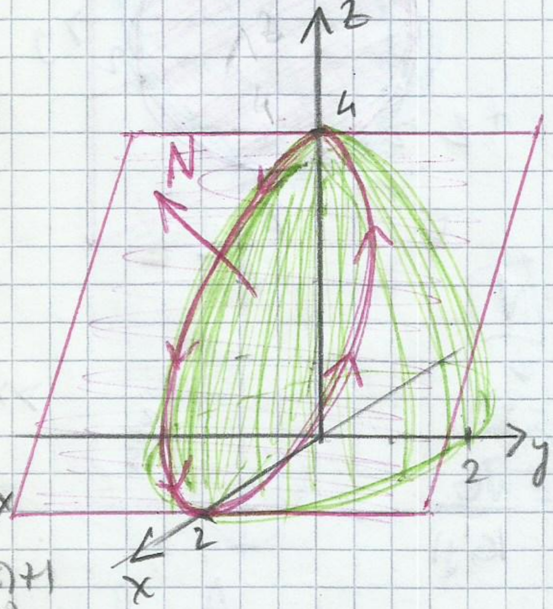
$$\begin{cases} \boxed{z = 4-x^2-y^2} \\ \boxed{z = 4-2x} \end{cases} \quad N = (2,0,1)$$

Hallo la intersección para analizar la proyección

$$4-x^2-y^2 = 4-2x$$
$$x^2-2x+y^2=0$$
$$\boxed{(x-1)^2+y^2=1}$$



$$\begin{cases} x = r\cos(t)+1 \\ y = r\sin(t) \end{cases}$$
$0 \le r \le 1$
$0 \le t \le 2\pi$



- C es curva cerrada y suave
- S es la porción del plano $z+2x=4$ contenida por C
- $\bar{F} \in C^1$ (componentes polinómicas)

T. Stokes: $\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, d\bar{S}$

$\bar{F} = (P, Q, R)$

$\hookrightarrow$ rotor $= (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = (0-(-z);\ x-(-2x);\ 0-0)$

$$\boxed{\text{rot}(\bar{F}) = (z;\ 3x;\ 0)}$$

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, \check{n}\, d\sigma = \iint_{S_{xy}} \text{rot}(\bar{F})\, n\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (z, 3x, 0)(2,0,1)\, dx\,dy =$$

$$\overset{z=4-2x}{=} \iint_{S_{xy}} 2z\, dx\,dy = 2\iint_{S_{xy}} 4-2x\, dx\,dy = \text{C.V.}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \overset{\text{Jac}}{r}\,(\underbrace{4-2(r\cos(t)+1)}_{4-2r\cos(t)-2})\, dr\,dt = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r - 2r^2\cos(t)\, dr\,dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\, dr\,dt - \underbrace{2\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2\cos(t)\, dr\,dt}_{0} = \underbrace{4\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\, dr\,dt}_{\text{área } S_{xy} \to \pi \cdot 1^2} = 4\pi$$

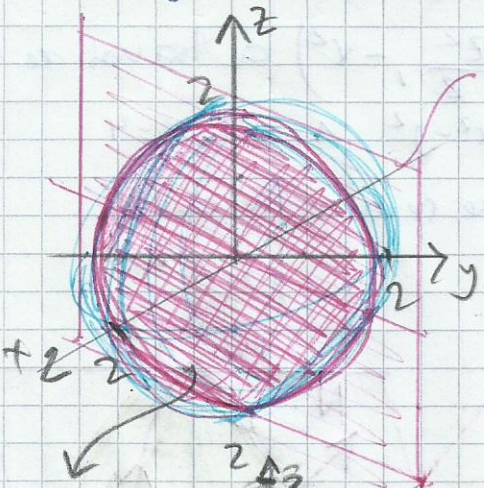
$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = 4\pi}$$

NOTA

② Determinar el área de la porción del plano $y=2x$ limitada por $x^2+y^2+z^2\leq 4$ → es la intersección entre una esfera y un plano que pasa por el centro

$\Rightarrow A = \pi \cdot r^2 = 4\pi$

$\boxed{A = 4\pi}$



$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \end{cases}$$

$x^2+(2x)^2+z^2 \leq 4$

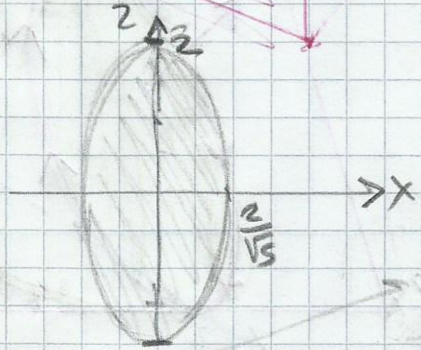
$5x^2+z^2\leq 4 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\frac{4}{5}}+\frac{z^2}{4}\leq 1}$

$\hookrightarrow \boxed{a=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad b=2}$

$\boxed{N}$

$y=2x$

$N = \frac{\nabla G}{|G'_y|}$



$N = (2, -1, 0)$

$\|N\| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} = \|N\|$

$A_S = \iint_S dS = \iint_{S_{xz}} \|N\| \, dx\,dz = \iint_{S_{xz}} \sqrt{5} \, dx\,dz =$

$\boxed{\text{Area elipse} = ab\pi}$

$= \sqrt{5} \underbrace{\iint_{S_{xz}} dx\,dz}_{\text{Area elipse}} = \cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \, 2\pi = 4\pi$

$\boxed{A = 4\pi}$

NOTA

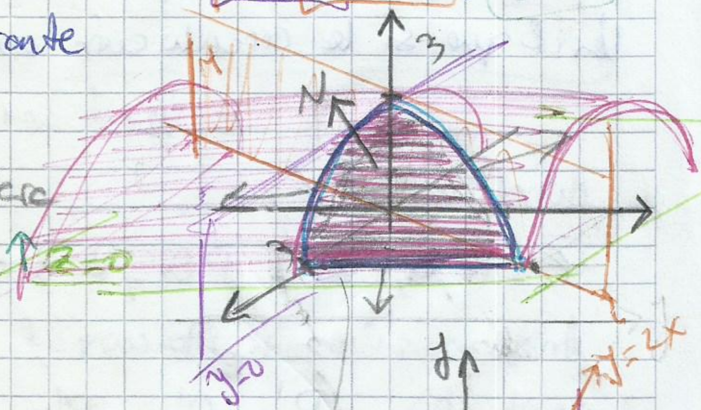
AM 2 | 2° parcial | Prof Hernández | HOJA N° 2/3 | FECHA 8-7-2?

(3) Calcular el flujo de $\bar{F}(\bar{x}) = (xy;\ xy^2,\ -2xyz)$ a través de la sup. frontera del sólido: $x^2+z^2 \leq 9$, $\boxed{0 \leq y \leq 2x}$, $z \geq 0$

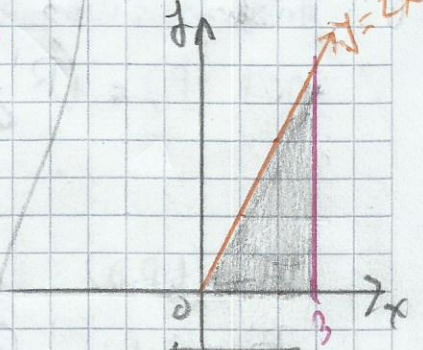
Indicar si el flujo es saliente o entrante

Sup. frontera $\Rightarrow$ T. Gauss

W es el sólido y S la sup frontera



$$\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, d\text{vol} =$$



$\bar{F}(P,Q,R)$

$\hookrightarrow \operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z =$

$$= y + 2xy - 2xy = \boxed{y = \operatorname{div}(\bar{F})}$$

$$\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W y\, d\text{vol} = \int_0^3 \int_0^{2x} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y\ dz\,dy\,dx =$$

$z = \sqrt{9-x^2}$

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2} \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2x} y\sqrt{9-x^2}\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{2x} dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ \frac{(2x)^2}{2}\ dx = 2\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\ dx = \boxed{\frac{81}{8}\pi = \oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma}}$$

tabla

? (247)

es $>0 \Rightarrow$ flujo saliente

NOTA

④ Calcular la circ. del campo $\bar{F}_{(xyz)} = (\overset{P}{2x}; \overset{Q}{z}; \overset{R}{y-2z})$ a lo largo de la curva dada por las intersecciones de las superficies $C: \boxed{x^2+y^2=1 \ \wedge \ z+x=1}$ desde $(1,0,0)$ hasta $(0,1,1)$

Verifique si la circulación es independiente del camino

$\equiv$ verificar si $\bar{F}$ es conservativo

$dom(\bar{F}) = \mathbb{R}^3$ ✓

$\bar{F} = (P, Q, R)$, P, Q, R son polinomios $\Rightarrow \bar{F} \in C^1$ ✓

Analizo si es irrotacional ($\Rightarrow$ matriz jac. simétrica)

$$rot(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, \ P'_z - R'_x, \ Q'_x - P'_y) = (1-1, 0-0, 0-0)$$

$rot(\bar{F}) = \bar{0}$ ✓ es campo conservativo
$\rightarrow$ independencia del camino

$A = (1,0,0)$ inicio
$B = (0,1,1)$ fin

$$\rightarrow T: \bar{\gamma}_{(t)} = t(B-A) + A$$

$$\boxed{T: \bar{\gamma}_{(t)} = t(-1,1,1) + (1,0,0) \quad t \in [0,1]}$$

$\hookrightarrow \bar{\gamma}_{(t)} = (\underbrace{1-t}_{x}, \underbrace{t}_{y}, \underbrace{t}_{z})$

$\bar{F}$ campo cons.

$\bar{\gamma}'_{(t)} = (-1,1,1)$

$$\int_C \bar{F} \, d\bar{l} \overset{\downarrow}{=} \int_T \bar{F} \, d\bar{l} = \int_A^B \bar{F}(\bar{\gamma}_{(t)}) \, \bar{\gamma}'_{(t)} dt = \int_0^1 (2(\overset{x}{1-t}), \overset{z}{t}, \overset{y-2z}{t-2t}) (-1,1,1) \, dt =$$

$$= \int_0^1 -2(1-t) + \cancel{t} + \cancel{t} - 2t \, dt = -2\int_0^1 1-t \, dt =$$

$$= -2 \cdot \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\boxed{\int_C \bar{F} \, d\bar{l} = -1}$$

NOTA

AM 2	2° parcial	HOJA N° 3/3
	Prof. Hernandez	FECHA 8-7-24

(5) a) Definir líneas de campo para un campo vectorial

C: $\bar{\gamma}(t)$ es línea de campo si $\bar{f}(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t)$

b) Hallar la línea de campo de $\bar{f}(x,y) = (2;x)$ que pase por $(2;5)$

$\bar{f}(x,y) = (2;x) \longrightarrow$ l.c: $\dfrac{dx}{2} = \dfrac{dy}{x}$

$$\int \frac{x}{2}\,dx = \int dy$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + c = y}$$

Paso por $(2;5) \to x=2$, $y=5 \longrightarrow \dfrac{2^2}{4} + c = 5 \to c = 4$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4} + 4}$$

(6) a) Enunciar el teorema de Green indicando hipótesis

hipótesis

Sean: C una curva cerrada y suave a trozos, orientada positivam.
D una región compacta de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es C
$\bar{F} = (P, Q) \in C^1$

$$\Longrightarrow \oint_{C^+} \bar{F}\,d\bar{e} = \iint_D Q'_x - P'_y \,dxdy$$

b) Si $\bar{f}(x,y) = (\overset{P}{2y} ; \overset{Q}{x+y})$, donde $\oint_{C^+} \bar{f}\cdot d\bar{g} = -6$ determine el área del recinto plano D que tiene como curva frontera a C

$$\oint_{C^+} \bar{f}\,d\bar{g} = \iint_D Q'_x - P'_y \,dxdy = -6$$ x enunciado

$$= \iint_D \overset{-1}{1-2}\,dxdy = -\iint_D dxdy$$ Área de D

$$-\iint_D dxdy = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{A_D = 6}$$

NOTA